Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

**факультет программной инженерии и компьютерной техники**

**Расчётно-графическая работа. Линал № 1**

по теме «Линейное пространство и СЛАУ»

Вариант №2

Студенты: Собитов Анвархон

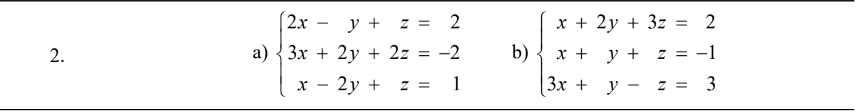
*Преподаватель:*

Селеменчук Антон Сергеевич

Санкт-Петербург, 2023

**Задание 1. СЛАУ и определители**

Даны две системы линейных алгебраических уравнений:



1. Исследуйте системы на совместность/несовместность, определенность/неопределенность на основе теоремы Кронекера-Капелли и следствия из него (о количестве решений).
2. Для совместной определенной системы (если она есть):

а) Найдите определитель основной матрицы методом разложения по 3-й строке и затем по 2-му столбцу (без предварительного упрощения элементарными преобразованиями).

б) Решите её, проверьте решение подстановкой.

1. Для неопределенной или несовместной системы (если она есть):

а) Запишите её как однородную. Найдите базис подпространства, которое задаётся этой системой. Изобразите подпространство решений на графике.

Как изобразить на графике?

* + открыть Геогебру 3D: https://[www.geogebra.org/3d](http://www.geogebra.org/3d)
  + задать базисные векторы подпространства например, если ранг базиса равен 1:

𝑎 = (1,1,1)

* + задать линейную оболочку, натянутую на этот базис например, если ранг базиса равен 1:

𝑡 ∙ 𝑎

б) Найдите множество всех решений неопределённой системы, изобразите его на том же графике.

Как изобразить на графике?

* + - задать вектор частного решения неоднородной СЛАУ например:

𝑥0 = (1,2,3)

* + - добавить к нему линейную оболочку из п. а)

например, если ранг базиса линейной оболочки равен 1

**Решение**

а) Слау №1

Чтобы выяснить наличие решений заданной СЛАУ, используем теорему Кронекера-Капелли. Нам понадобятся матрица системы A и расширенная матрица системы , запишем их:

Найдем минор третьего порядка A, т.к матрица А содержит три строки и три столбца, то минор третьего порядка это определитель A, т.е.

det **A** = = 2·2·1 + (-1)·2·1 + 1·3·(-2) - 1·2·1 - 2·2·(-2) - (-1)·3·1 = 4 - 2 - 6 - 2 + 8 + 3 = 5

Итак, есть минор третьего порядка матрицы A, который не равен нулю. Итак, наивысший порядок миноров матрицы A, среди которых есть хотя бы один не равный нулю, равен 3. Следовательно, rang A=3.

Найдем rang . Давайте посмотрим на структуру матрицы . До черты в матрице  находятся элементы матрицы A, причём мы выяснили, что ΔA≠0. Следовательно, у матрицы  есть минор третьего порядка, который не равен нулю. Миноров четвёртого порядка матрицы  составить мы не можем, поэтому делаем вывод: rang =3.

Так как rang A=rang , то согласно теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решение (хотя бы одно). Чтобы указать количество решений, учтём, что наша СЛАУ содержит 3 неизвестных: x1, x2 и x3. Так как количество неизвестных n=3, то делаем вывод: rang A=rang = n, поэтому согласно из следствия теоремы Кронекера-Капелли, система является определённой, т.е. имеет единственное решение.

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

1-ую строку делим на 2

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

2-ую строку делим на 3.5

К 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на 0.5; к 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 1.5

3-ую строку делим на

от 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на ; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на

Проверка

2·2 - (-1) + (-3) = 4 + 1 - 3 = 2

3·2 + 2·(-1) + 2·(-3) = 6 - 2 - 6 = -2

2 - 2·(-1) + (-3) = 2 + 2 - 3 = 1

2а) Найдем определитель, методом разложения по 3-й строке, основной матрицы

Найдем определитель, методом разложения по 2-ому столбцу, основной матрицы

б) Слау №2

Чтобы выяснить наличие решений заданной СЛАУ, используем теорему Кронекера-Капелли. Нам понадобятся матрица системы A и расширенная матрица системы , запишем их:

Найдем минор третьего порядка A, т.к матрица А содержит три строки и три столбца, то минор третьего порядка это определитель A, т.е.

det **A** =   = 1·1·(-1) + 2·1·3 + 3·1·1 - 3·1·3 - 1·1·1 - 2·1·(-1) = -1 + 6 + 3 - 9 - 1 + 2 = 0

Т.к. минор третьего порядка равен 0, а минор первого порядка не равен 0, следовательно ранг матрицы . Вычислим миноры второго порядка.

det **A** = = 1·1 - 1·2 = 1 - 2 = -1

det **A** =   = 1·1 - 1·3 = 1 - 3 = -2

det **A** = = = 1·1 - 3·2 = 1 - 6 = -5

Т.к существует хотя бы один минор второго порядка отличный от нуля, то ранг основной матрицы равен 2. rang A = 2

Найдем ранг расширенной матрицы

Т.к коэффициенты системы, это и есть матрица A, то один из миноров третьего порядка равен 0, вычислим еще один минор третьего порядка

det **A** = = 1·1·3 + 2·(-1)·3 + 2·1·1 - 2·1·3 - 1·(-1)·1 - 2·1·3 = 3 - 6 + 2 - 6 + 1 - 6 = -12

Второй минор третьего порядка отличный от нуля, следовательно ранг расширенной матрицы = 3

По теореме Кронекера — Капелли, rang (A) rang () , следовательно СЛАУ несовместна (не имеет решений)

3а) Запишем ее как однородную

Решим систему методом Гаусса

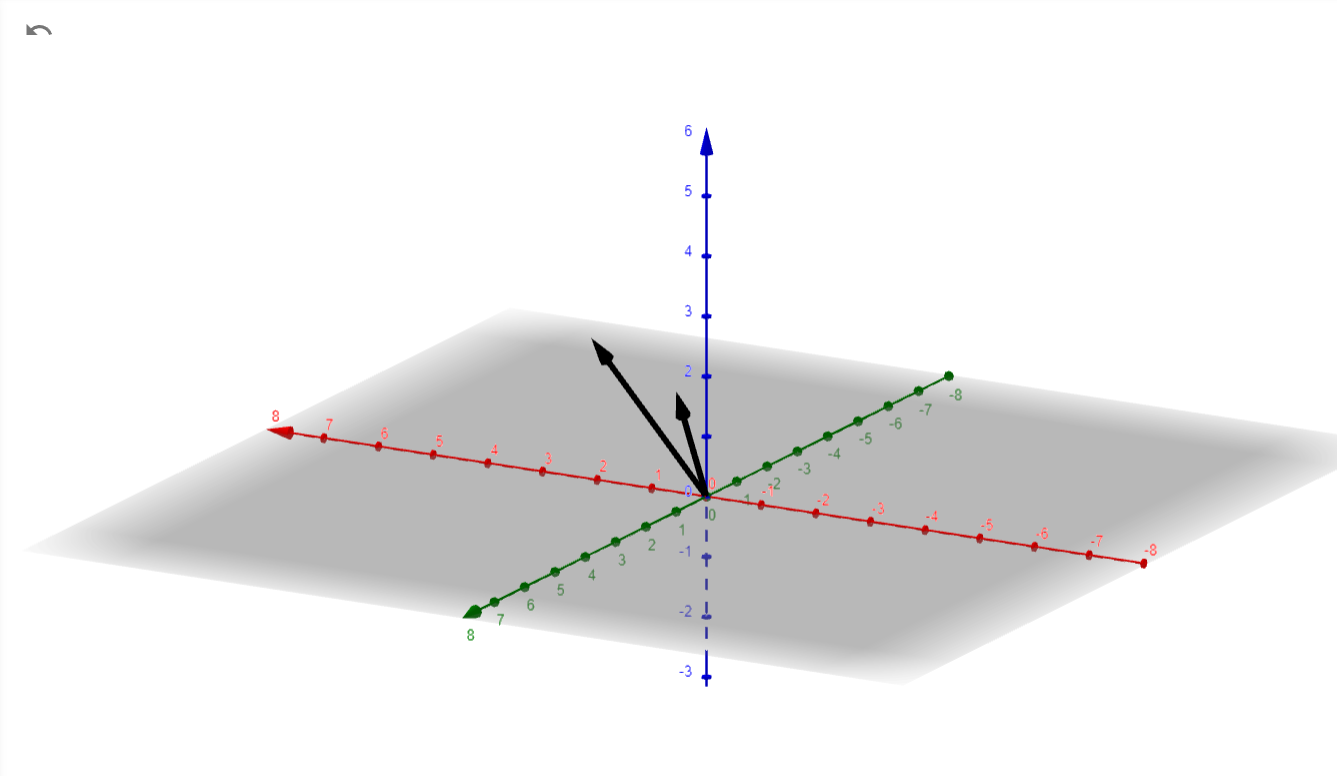
Запишем расширенную матрицу

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3

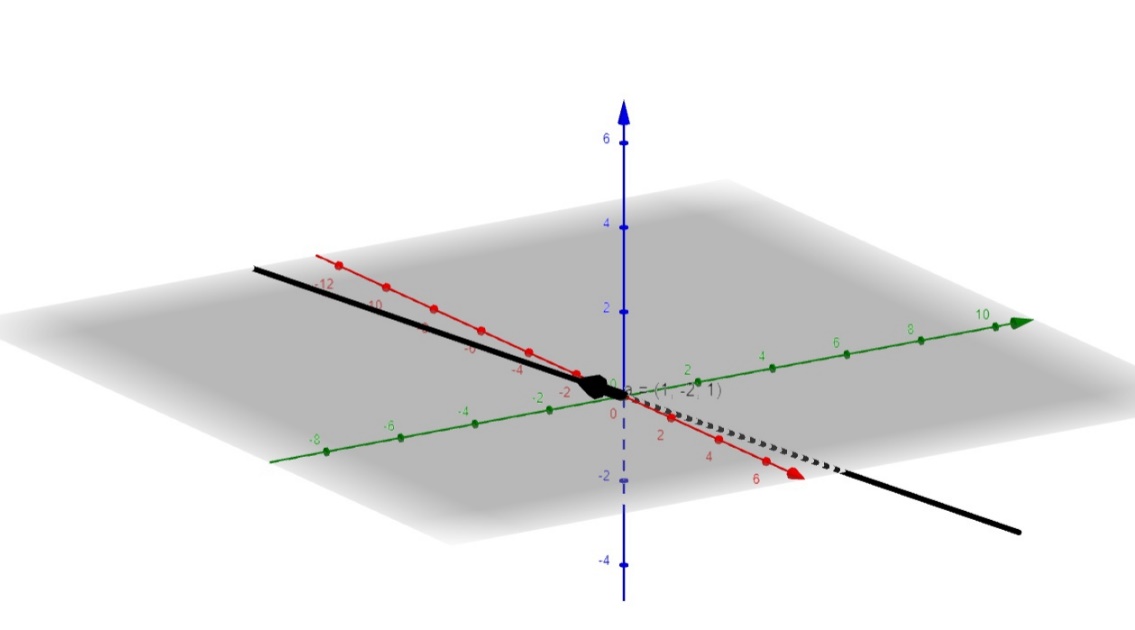
Вторую строку умножаем на -5 и отнимаем от 3 строки

Следовательно векторы a = (1,2,3) и b = (0,1,2) являются базисами подпространства.

Изобразим подпространство



Зададим линейную оболочку натянутую на этот базис. Т.к линейная оболочка натянутая на базис векторного пространства, равна этому же пространству.



**Задание 2. Координаты вектора в базисе**

Докажите, что система A является базисом в соответствующем линейном пространстве L. Найдите в этом базисе координаты элемента x.

а) L – пространство матриц второго порядка:

A={} и x

Решение

Т.к. матрицы системы принадлежат пространству матриц второго порядка, поэтому для доказательства того, что эти матрицы образуют базис проверим, что они линейно независимы.

Составим линейную комбинацию

Эта матрица эквивалентна следующей системе линейных однородных уравнений

Найдем определитель матрицы коэффициентов. Так как число уравнений в системе совпадает с числом неизвестных, то ненулевое значение определителя матрицы коэффициентов влечет единственность решения, откуда следует линейная независимость исходной системы векторов.

Следовательно исходная система образует базис пространства L

Координатами вектора x является 4 числа (, , , ), удовлетворяющие уравнению

Это уравнение эквивалентно следующей системе линейных уравнений:

Будем решать эту систему методом Гаусса.

1-ую строку делим на 2

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2; от 4 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1

2-ую строку делим на 7

К 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на 1; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 5; от 4 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 4

3-ую строку делим на

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на ; к 2 строке добавляем 3 строку, умноженную на ; от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на

4-ую строку делим на

От 1 строки отнимаем 4 строку, умноженную на ; к 2 строке добавляем 4 строку, умноженную на ; к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на

Проверка

2·0 - 2·0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1

3·0 + 4·0 - 0 + 2·1 = 0 + 0 + 0 + 2 = 2

2·0 + 3·0 + 0 - 3·1 = 0 + 0 + 0 - 3 = -3

0 + 3·0 + 0 - 1 = 0 + 0 + 0 - 1 = -1

Ответ

б) L – пространство многочленов степени не больше четырёх: Составим линейную комбинацию векторов, если они являются базисом, то она будет обращаться в 0, только если все будут 0

Следовательно

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

3-ую строку делим на -1

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; от 5 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1

4-ую строку делим на 2

К 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1; к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1; от 5 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1

Найдём координаты x в пространстве многочленов.

x=(1,-1,1,-1,1)

Координатами вектора x является 5 чисел (λ1, λ2, λ3, λ4, λ5), удовлетворяющие уравнению

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

3-ую строку делим на -1

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; от 5 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1

4-ую строку делим на 2

к 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1; к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1; от 5 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1

**Задание 3. Линейная оболочка и СЛАУ**

Найдите систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов A.

A = {}

Рассмотрим систему из 3 линейных уравнений с 4 неизвестными

Найдем ФСР системы

1-ую строку делим на 5

От 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 9

2-ую строку делим на 2.8

к 1 строке добавляем 2 строку, умноженную на 0.4; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1.6

3-ую строку делим на

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на ; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на

Фундаментальная система решений

Пусть => , пусть => =>

Следовательно мы получили уравнение, подпространство решений которого совпадает с линейной оболочкой системы векторов A.

**Задание 4. Координаты при смене базиса**

В линейном пространстве со стандартным базисом E = (, , ), где заданы системы векторов A = (, , ) и B = (, , )

Для проверки на базис определитель матрицы, составленной из системы векторов, не должен быть равен нулю.

A-образует базис; B-образует базис

Проверим на ортогональность базисы через скалярное произведение. Если (, ) = 0 при i ̸= j, то система ортогональна.

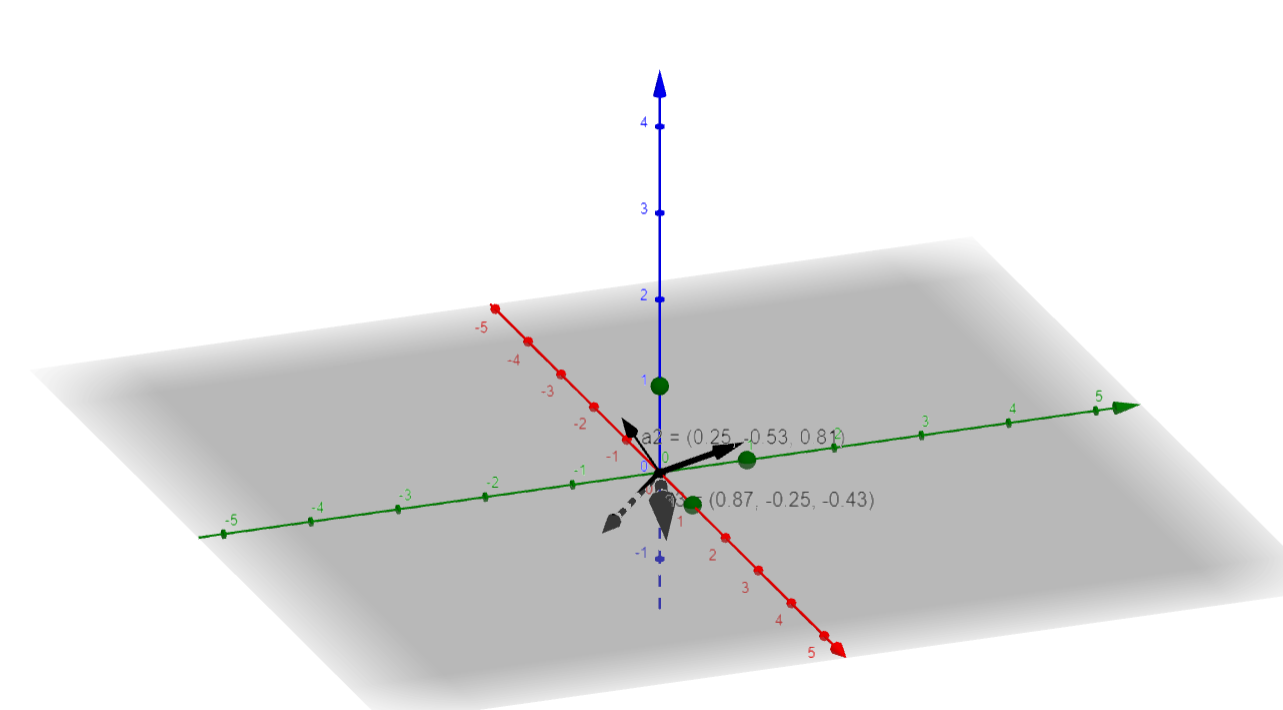
(,) = 0.4330.25 + 0.808(-0.5335) + 0.39950.808 = 0.10825 -0.431068+0.322796=-0.000022 (базис A не ортогонален)

(,) = 4.08010.933 + 1.1495(-0.259) + (-1.741)2.0155 = 3,8067333-0.2977205-3.5089855 = 0.0000273 (базис B не ортогонален)

Ортонормированность базиса проверяется через длины векторов, по формуле:

(Должно быть равно единице)

Для ортонормированности нам требуется ортогональность, поэтому нет смысла проверять базисы. Следующим шагом найдём матрицу перехода T из базиса A в базис B.(Матрица, столбцы которой равны координатам векторов из B в базисе A.)



**Задание 5. Метод Гаусса**

Решить СЛАУ Ax = b методом Гаусса для:

1-ую строку делим на 2

К 2 строке добавляем 1 строку, умноженную на 2; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 4; от 4 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 6

2-ую строку делим на -1

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 2; к 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 1; к 4 строке добавляем 2 строку, умноженную на 2

3-ую строку делим на 3

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; к 4 строке добавляем 3 строку, умноженную на 3

4-ую строку делим на 2

От 1 строки отнимаем 4 строку, умноженную на ; к 2 строке добавляем 4 строку, умноженную на ; от 3 строки отнимаем 4 строку, умноженную на ;